受動性に基づく動的視覚フィードバック制御の安定性と L_2 ゲイン制御性能解析

河 合 宏 之* · ○村 尾 俊 幸* · 藤 田 政 之*
*金 沢 大 学

Passivity-based Dynamic Visual Feedback Control :Stability and L_2-gain Performance Analysis

Hiroyuki Kawai*, ○ Toshiyuki Murao* and Masayuki Fujita*
*Kanazawa University

This paper investigates vision–based robot control based on the passivity for the three dimensional target tracking. Firstly the model of the visual feedback system is constructed by using the homogeneous representation and adjoint transformation in order to regard the rotation as one of states for the visual feedback system. Secondly we derive the passivity of the dynamic visual feedback system by combining the manipulator dynamics and the visual feedback system. Finally stability and L_2-gain performance analysis are discussed based on the passivity.

1 はじめに

視覚システムは豊富で多様な情報を有し, かつ手軽であるため, センサとしてその重要性が増してきている. 近年, 画像処理技術の進展に伴いリアルタイムで視覚情報をシステム全体に反映させることが可能になっているため, ロボットをはじめとするダイナミカルシステムに対して視覚情報をフィードバックループに組み込んだ視覚フィードバック制御が研究されている [1,2].

本研究で取り扱う視覚フィードバックシステムの制御目的は, 視覚情報を用いて 3 次元空間内を運動する観測対象にカメラを追従させることである. 近年ではこの制御目的の達成に加え, 安定性の大域的化やカメラ視野を議論した研究 [3,4], 3 次元空間でのカメラ軌道を決定する軌道計画問題の研究 [5] が注目されているが, 多くの従来研究ではマニピュレータダイナミクスを無視できると仮定している. この仮定はロボットをゆっくりと動作させるときには有効であるが, Direct Drive アームのように速く動作するロボットの場合にはこの仮定は有効ではなくなる. したがって, ロボットに速い動作をさせるためには, マニピュレータダイナミクスを考慮することが必要となる. Kelly ら [6] は, 観測対象までの距離が既知であると仮定し, マニピュレータダイナミクスを含む視覚フィードバックシステムの安定性解析をおこなっている. また, 視覚フィードバックシステムでは観測対象が 3 次元空間内を運動するため, 3 次元空間での位置と姿勢を考慮することが重要となる. しかしながら, 多くの従来研究では扱いやすさの点から画像面上での偏差を状態としており, 3 次元空間での位置姿勢を状態とみなした研究は少なく, その安定性や制御性能解析をおこなった研究はなされていない.

視覚フィードバックシステムにおいて 3 次元空間での位置姿勢を状態ととらえるために, 従来研究 [7] では同次表現や随伴写像 [8,9] を用いて視覚フィードバックシステムを表現し, その安定性や制御性能解析をおこなった. 本稿では, 従来研究で得られた

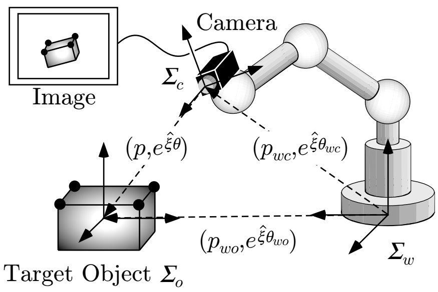

Fig. 1:視覚フィードバックシステム

視覚フィードバックシステムにマニピュレータダイナミクスを考慮することで, 動的視覚フィードバックシステムを構成する. そして, システムの有する性質を示したあと, 安定性と L_2 ゲイン制御性能解析をおこなう.

2 視覚フィードバックシステム

本稿では, Fig. 1 に示すようなマニピュレータがカメラを有する視覚フィードバックシステムについて考える. 座標系は Fig. 1 に示すように, 基準座標系 Σ_w, カメラ座標系 Σ_c および観測対象座標系 Σ_o の 3 つを考える. 基準座標系からみたカメラの位置姿勢および観測対象の位置姿勢をそれぞれ $g_{wc} = (p_{wc}, e^{\hat{\xi}\theta_{wc}})$, $g_{wo} = (p_{wo}, e^{\hat{\xi}\theta_{wo}})$ で表す. このとき, カメラからみた観測対象の相対的な位置姿勢 $g = (p, e^{\hat{\xi}\theta})$ は

$$g = g_{wc}^{-1} g_{wo} \tag{1}$$

で表される. また, カメラのボディ速度を $V_{wc}^b = (v_{wc}^b, \omega_{wc}^b)$ と表記し, 観測対象のボディ速度を $V_{wo}^b = (v_{wo}^b, \omega_{wo}^b)$ と表す.

視覚フィードバックシステムでは, 相対位置姿勢を直接観測することができないため, オブザーバにより相対位置姿勢の推定値

$\bar{g} = (\bar{p}, e^{\hat{\bar{\xi}}\bar{\theta}})$ を構成する．また, 相対的な位置姿勢 g の目標値を $g_d = (p_d, e^{\hat{\xi}\theta_d})$ で表し, 一定値であるとする．このとき, 相対的な位置姿勢の推定値と目標値との偏差 $g_{ec} = (p_{ec}, e^{\hat{\xi}\theta_{ec}})$, 真値と推定値の偏差 $g_{ee} = (p_{ee}, e^{\hat{\xi}\theta_{ee}})$ をそれぞれ

$$g_{ec} := g_d^{-1}\bar{g}, \quad g_{ee} := \bar{g}^{-1}g \tag{2}$$

と定義する． 回転行列 $e^{\hat{\xi}\theta}$ の偏差ベクトルを与える関数 $e_R(e^{\hat{\xi}\theta}) := \mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}\theta})^\vee$, $\mathrm{sk}(e^{\hat{\xi}\theta}) = \frac{1}{2}(e^{\hat{\xi}\theta} - e^{-\hat{\xi}\theta})$ を用いることで, 制御偏差 g_{ec} と推定偏差 g_{ee} の偏差ベクトルは

$$e_c := \begin{bmatrix} p_{ec}^T & e_R^T(e^{\hat{\xi}\theta_{ec}}) \end{bmatrix}^T, \quad e_e := \begin{bmatrix} p_{ee}^T & e_R^T(e^{\hat{\xi}\theta_{ee}}) \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

で定義される．

このとき, 偏差ベクトル $e = [e_c^T \ e_e^T]^T$ をシステムの状態とする視覚フィードバックシステムは

$$\begin{bmatrix} V_{ec}^b \\ V_{ee}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{Ad}_{(\bar{g}^{-1})} & I \\ 0 & -\mathrm{Ad}_{(g_{ee}^{-1})} \end{bmatrix} u_{ce} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} V_{wo}^b \tag{4}$$

で表される [7]．ただし, $u_{ce} := [(V_{wc}^b)^T \ u_e^T]^T$ であり, u_e はオブザーバに対する入力である．

視覚フィードバックシステムに対して, 以下の補題が成り立つ．

補題 1 [7] 観測対象が運動していない (すなわち $V_{wo}^b = 0$) とする．出力を

$$\nu_{ce} := \begin{bmatrix} -\mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})}^T & 0 \\ \mathrm{Ad}_{(e^{-\hat{\xi}\theta_{ec}})} & -I \end{bmatrix} e \tag{5}$$

とするとき, 視覚フィードバックシステムの入出力間に

$$\int_0^T u_{ce}^T \nu_{ce} d\tau \geq -\beta_{ce}, \quad \forall T > 0 \tag{6}$$

が成り立つ．ただし β_{ce} はある非負の定数である．

この補題は, 視覚フィードバックシステムが受動性を有していることを示唆している．Fig. 2 に u_{ce} を入力, ν_{ce} を出力と解釈したときの視覚フィードバックシステムのブロック図を示す．

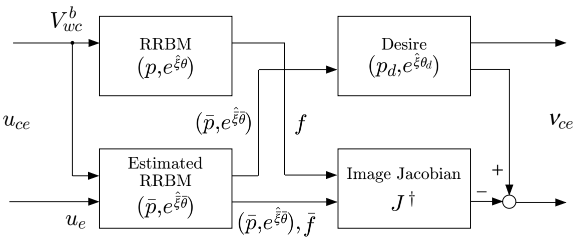

Fig. 2:視覚フィードバックシステムのブロック図

3 動的視覚フィードバック制御

3.1 動的視覚フィードバックシステム

マニピュレータダイナミクスは

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + \tau_d \tag{7}$$

で表される．$q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathcal{R}^n$ はそれぞれ各関節の角度, 角速度, 角加速度を表し, τ は入力トルク, τ_d は外乱トルクである．カメラ速度 (手先の速度) はマニピュレータの関節角速度とマニピュレータヤコビアンを用いることでつぎのように表される．

$$V_{wc}^b = J_b(q)\dot{q} \tag{8}$$

一方, カメラ速度の目標値を u_d で定義し, マニピュレータの関節角速度の目標値を $\dot{q}_d$ で定義すると, 上式と同様にしてマニピュレータヤコビアンを用いることで

$$\dot{q}_d = J_b^\dagger(q)u_d \tag{9}$$

が成り立つ．ここで $\dagger$ は擬似逆行列を表す．マニピュレータの関節角速度に関する偏差を

$$\xi := \dot{q} - \dot{q}_d \tag{10}$$

と定義する．また, 制御則に設計の自由度を与えるために, つぎのような重み行列を考える．

$$W_c := \begin{bmatrix} W_{pc} & 0 \\ 0 & w_{rc}I_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6\times6}, \quad W_e := \begin{bmatrix} W_{pe} & 0 \\ 0 & w_{re}I_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6\times6} \tag{11}$$

ただし, $W_{pc}, \ W_{pe} \in \mathcal{R}^{3\times3}$ は正定行列とし, $w_{rc}, \ w_{re} \in \mathcal{R}$ は正の定数とする．

ここで, マニピュレータへの入力トルクとして

$$\begin{aligned} \tau = {} & M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) \\ & + J_b^T(q)\mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})}^T W_c e_c + u_\xi \end{aligned} \tag{12}$$

を考える．$\dot{q}_d$, $\ddot{q}_d$ はそれぞれ関節角速度と関節角加速度の目標値である．また, u_ξ は後に提案する新たな入力である．このとき, (4)(7)(12) 式を用いることで動的視覚フィードバックシステムは

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ V_{ec}^b \\ V_{ee}^b \end{bmatrix} = {} & \begin{bmatrix} -M(q)^{-1}C(q, \dot{q})\xi + M(q)^{-1}J_b^T(q)\mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})}^T W_c e_c \\ -\mathrm{Ad}_{(\bar{g}^{-1})}J_b(q)\xi \\ 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} M(q)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Ad}_{(\bar{g}^{-1})} & I \\ 0 & 0 & -\mathrm{Ad}_{(g_{ee}^{-1})} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} M(q)^{-1}\tau_d \\ 0 \\ V_{wo}^b \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

で表される．ただし, $u := [u_\xi^T \ u_d^T \ u_e^T]^T$ で定義される．動的視覚フィードバックシステムにおける制御目的は, 運動する観測対象にカメラを追従させることであり, 状態 ξ, e_c および e_e を 0 に留めておくことで制御目的が達成される．

3.2 動的視覚フィードバックシステムの入出力間の関係

制御目的を達成するための制御則を提案するまえに, 制御則の構成に対して重要な役割をはたす動的視覚フィードバックシステムの有する性質を示す．

補題 2 観測対象が運動しておらず, 外乱トルクがない (すなわち $V_{wo}^b = 0$, $\tau_d = 0$) とする．このとき, 出力を

$$\nu := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})}^T W_c & 0 \\ 0 & \mathrm{Ad}_{(e^{-\hat{\xi}\theta_{ec}})} W_c & -W_e \end{bmatrix} x, \quad x := \begin{bmatrix} \xi \\ e_c \\ e_e \end{bmatrix} \tag{14}$$

とするとき, 動的視覚フィードバックシステム (13) の入出力間に

$$\int_0^T u^T \nu d\tau \geq -\beta_0, \quad \forall T > 0 \tag{15}$$

が成り立つ. ただし β_0 はある非負の定数である.

(証明) エネルギー関数として

$$V = \frac{1}{2}\xi^T M(q)\xi + \frac{1}{2}p_{ec}^T W_{pc} p_{ec} + w_{rc}\phi(e^{\hat{\xi}\theta_{ec}}) + \frac{1}{2}p_{ee}^T W_{pe} p_{ee} + w_{re}\phi(e^{\hat{\xi}\theta_{ee}}) \tag{16}$$

を考える. $\hat{p}_{ec}$ と $\hat{p}_{ee}$ の歪対称性に注意すると

$$p_{ec}^T W_{pc}\hat{p}_{ec} e^{-\hat{\xi}\theta_d}\omega_{wc} = -(W_{pc}^{\frac{1}{2}}p_{ec})^T (W_{pc}^{\frac{1}{2}} e^{-\hat{\xi}\theta_d}\omega_{wc})^\wedge W_{pc}^{\frac{1}{2}} p_{ec} = 0$$

$$p_{ee}^T W_{pe}\hat{p}_{ee}\omega_{we} = -(W_{pe}^{\frac{1}{2}}p_{ee})^T (W_{pe}^{\frac{1}{2}}\omega_{we})^\wedge W_{pe}^{\frac{1}{2}} p_{ee} = 0$$

が成り立つことから, エネルギー関数 V の時間微分は (13) 式を用いることで,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \xi^T J_b^T(q)\mathrm{Ad}^T_{(g_d^{-1})} W_c e_c - e_c^T W_c \mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})} J_b(q)\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi^T(\dot{M} - 2C)\xi + x^T \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -W_c\mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})} & W_c\mathrm{Ad}_{(e^{\hat{\xi}\theta_{ec}})} \\ 0 & 0 & -W_e \end{bmatrix} u \\ &= u^T \nu \end{aligned} \tag{17}$$

となる. (17) 式の両辺を積分することで

$$\int_0^T u^T \nu d\tau = V(T) - V(0) \geq -\beta_0 \tag{18}$$

が成り立つ. □

この補題は, (13) 式の動的視覚フィードバックシステムが受動性を有していることを示唆している. また, $\dot{M} - 2C$ の歪対称性と $\hat{p}_{ec}$, $\hat{p}_{ee}$ の歪対称性も受動性における類似点のひとつと考えられる. したがって動的視覚フィードバックシステムは, マニピュレータダイナミクスを含まない (4) 式の視覚フィードバックシステムの受動性を保存しているとみなすことができる. Fig. 3 に動的視覚フィードバックシステムのブロック図を示す.

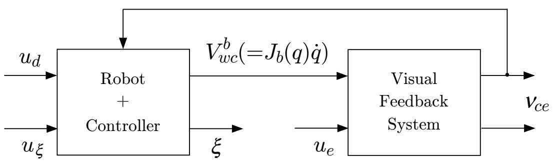

Fig. 3:動的視覚フィードバックシステムのブロック図

3.3 安定性と L_2 ゲイン制御性能解析

制御問題を定式化するために, 動的視覚フィードバックシステムを一般化プラントとしてつぎのように表現する.

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ V_{ec}^b \\ V_{ee}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M(q)^{-1}C(q,\dot{q})\xi + M(q)^{-1}J_b^T(q)\mathrm{Ad}^T_{(g_d^{-1})}W_c e_c \\ -\mathrm{Ad}_{(\bar{g}^{-1})}J_b(q)\xi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M(q)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Ad}_{(\bar{g}^{-1})} & I \\ 0 & 0 & -\mathrm{Ad}_{(g_{ee}^{-1})} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} M(q)^{-1}\tau_d \\ 0 \\ V_{wo}^b \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} \varepsilon x \\ \rho u \end{bmatrix} \tag{19}$$

ε と ρ は状態と入力に対する重み行列である. また, 外乱として $d := [\tau_d^T \ (V_{wo}^b)^T]^T$ を定義する. このとき, (19) 式の動的視覚フィードバックシステムに対して制御問題をつぎのように定式化する.

(制御問題) 定数 $\gamma > 0$ が与えられている. このとき (19) 式において, 外乱がないとき (すなわち $d = 0$ のとき) $t \to \infty$ で $x = 0$ を達成し, 任意の時刻 $T \in [0, \infty]$ に対して, つぎの不等式

$$\int_0^T (\gamma^2\|d\|^2 - \|z\|^2)dt \geq -\beta$$

を満たす制御入力 u を決定せよ. ただし β はある非負の定数である.

このとき, 補題 2 で示した動的視覚フィードバックシステムの受動性に基づくことで, 安定性に関してつぎの定理が導かれる.

定理 1 $d = 0$ のとき, (19) 式と入力

$$u = -\begin{bmatrix} K_\xi & 0 & 0 \\ 0 & K_c & 0 \\ 0 & 0 & K_e \end{bmatrix} \nu \ (:= -Kx) \tag{20}$$

で構成される閉ループ系の平衡点 $x = 0$ は漸近安定である. ただし, ゲイン $K_\xi \in \mathcal{R}^{n\times n}$, K_c, $K_e \in \mathcal{R}^{6\times 6}$ は正定行列とする.

(証明) (16) 式のエネルギー関数をリアプノフ関数候補とすると, (19)(20) 式の解軌道に沿った時間微分は (17) 式より

$$\dot{V} = u^T\nu = -x^T K_x x \tag{21}$$

ただし

$$K_x := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -W_c\mathrm{Ad}_{(g_d^{-1})} & W_c\mathrm{Ad}_{(e^{\hat{\xi}\theta_{ec}})} \\ 0 & 0 & -W_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_\xi & 0 & 0 \\ 0 & K_c & 0 \\ 0 & 0 & K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Ad}^T_{(g_d^{-1})}W_c & 0 \\ 0 & \mathrm{Ad}_{(e^{-\hat{\xi}\theta_{ec}})}W_c & -W_e \end{bmatrix}$$

と導かれる. ゲイン K_ξ, K_c, K_e の正定性より, 行列 K_x が正定となるため, システムの平衡点 $x = 0$ は漸近安定となる. □

観測対象が運動する場合については, その運動を外乱のひとつと捉え, 外乱抑制問題を考えることで制御性能解析をおこなう. ここで, ある正の数を γ としてつぎの行列を定義する.

$$P := K_x - \frac{1}{2}\varepsilon^T\varepsilon - \frac{1}{2}\|\rho K\|^2 - \frac{1}{2\gamma^2}\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_e^2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

このとき, 制御性能解析に関するつぎの定理が示される.

定理 2 γ および被制御出力の重み行列 ε, ρ に対して, $P > 0$ を満たすようにゲイン K_ξ, K_c, K_e および重み W_c, W_e を選ぶとき, (19)(20) 式で構成される動的視覚フィードバックシステムは γ 以下の L_2 ゲインを有する.

(証明) 蓄積関数として (16) 式を考える. その解軌道に沿った時間微分は

$$\dot{V} = \frac{\gamma^2}{2}\|d\|^2 - \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{\gamma^2}{2}\|d\|^2 + \frac{1}{2}(\|\varepsilon x\|^2 + \|\rho u\|^2) - x^T K_x x + x^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_e\mathrm{Ad}_{(e^{\hat{\xi}\theta_{ee}})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ V_{wo}^b \end{bmatrix} \tag{23}$$

となる．上式に対して平方完成を用いて，最悪外乱として

$$d = \frac{1}{\gamma^2}\left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_e \mathrm{Ad}_{(e^{-\hat{\xi}\theta_{ee}})} \end{array}\right] x \tag{24}$$

を考えると

$$\begin{aligned} &\dot{V} + \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{\gamma^2}{2}\|d\|^2 \\ &\leq -x^T K_x x + \frac{1}{2\gamma^2}\left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_e^2 \end{array}\right]\|x\|^2 + \frac{1}{2}(\|\varepsilon x\|^2 + \|\rho u\|^2) \\ &= -x^T P x \end{aligned} \tag{25}$$

が導かれる．$P > 0$ とし，両辺を積分することで

$$\int_0^T (\gamma^2\|d\|^2 - \|z\|^2) dt \geq 2V(T) - 2V(0) \geq -\beta \tag{26}$$

が成り立つ．したがって，$P > 0$ のとき動的視覚フィードバックシステムは外乱 d から被制御出力 z に関して γ 以下の L_2 ゲインを有する． □

定理 1, 2 は，補題 2 で示した動的視覚フィードバックシステムの受動性に基づいており，(16) 式のエネルギー関数を用いてリアプノフ関数および蓄積関数を構成している．L_2 ゲイン制御性能解析では，γ を外乱抑制レベルを示す指標とみなすことができる．

4　おわりに

本稿では，随伴写像と同次表現を用いて表された視覚フィードバックシステムにマニピュレータダイナミクスを考慮することで，動的視覚フィードバックシステムを構成した．また，従来研究でえられた視覚フィードバックシステムの受動性を保存したうえで，動的視覚フィードバックシステムが受動性を有することを示した．そして，受動性に基づき，エネルギー関数をそれぞれリアプノフ関数と蓄積関数とみなすことで安定性と L_2 ゲイン制御性能解析をおこなった．

参考文献

1) S. Hutchinson, G. D. Hager and P. I. Corke, “A Tutorial on Visual Servo Control,” *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 5, pp. 651–670, 1996.

2) ミニ特集, “ビジュアルサーボイング,” 計測と制御, Vol. 40, No. 9, 2001.

3) E. Malis, F. Chaumette and S. Boudet, “2-1/2-D Visual Servoing,” *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 2, pp. 238–250, 1999.

4) N. J. Cowan, J. D. Weingarten and D. E. Koditschek, “Visual Servoing via Navigation Functions,” *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 18, No. 4, pp. 521–533, 2002.

5) Y. Mezouar and F. Chaumette, “Path Planning for Robust Image–Based Control,” *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 18, No. 4, pp. 534–549, 2002.

6) R. Kelly, R. Carelli, O. Nasisi, B. Kuchen and F. Reyes, “Stable visual servoing of camera-in-hand robotic systems,” *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, Vol. 5, No. 1, pp. 39–48, 2000.

7) 河合, 藤田, “随伴写像を用いた剛体運動の視覚フィードバック制御の一考察,” 第 3 回 制御部門大会 資料, pp. 265–268, 2003.

8) R. Murray, Z. Li and S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, 1994.

9) F. Bullo and R. Murray, “Tracking for Fully Actuated Mechanical Systems: a Geometric Framework,” *Automatica*, Vol. 35, No. 1, pp. 17–34, 1999.

A　同次表現と随伴写像

同次表現と随伴写像 [8] について簡単にまとめる．2 つの座標系 Σ_A と Σ_B を考える．Σ_A の原点から Σ_B の原点への位置ベクトルを $p_{ab} \in \mathcal{R}^3$ で表し，Σ_A を基準とした Σ_B の姿勢を指数関数表現 [8] を用いて $e^{\hat{\xi}\theta_{ab}} \in SO(3)$ (ただし $\xi_{ab} \in \mathcal{R}^3$, $\theta_{ab} \in \mathcal{R}$ であり，簡単化のため混乱がない限り添え字は θ のみにつけて表記する) と表す．3 次元ベクトルに対する演算子 $\wedge$(wedge) は 3×3 の歪対称行列への写像であり，その逆写像は $\vee$(vee) で定義される [8]．このとき $g_{ab} = (p_{ab}, e^{\hat{\xi}\theta_{ab}}) \in SE(3)$ の同次表現は

$$g'_{ab} = \left[\begin{array}{cc} e^{\hat{\xi}\theta_{ab}} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathcal{R}^{4\times 4} \tag{27}$$

で表される．以下では，混同しない限り g_{ab} を 4×4 行列の同次表現として表記する．

つぎに，同次表現を用いた速度表現について述べる．剛体運動のボディ速度 (body velocity) は

$$\hat{V}_{ab}^b = g_{ab}^{-1}\dot{g}_{ab} = \left[\begin{array}{cc} \hat{\omega}_{ab}^b & v_{ab}^b \\ 0 & 0 \end{array}\right], \quad V_{ab}^b = \left[\begin{array}{c} v_{ab}^b \\ \omega_{ab}^b \end{array}\right] \tag{28}$$

と定義される [8]．$v_{ab} \in \mathcal{R}^3$ は並進速度，$\omega_{ab} \in \mathcal{R}^3$ は角速度を表す．このボディ速度と同次表現を用いて，新たな速度がつぎのように表されたとする．

$$\hat{V}' = g\hat{V}^b g^{-1} \tag{29}$$

このとき，次式で定義される同次表現 g の随伴写像

$$\mathrm{Ad}_{(g)} = \left[\begin{array}{cc} e^{\hat{\xi}\theta} & \hat{p}e^{\hat{\xi}\theta} \\ 0 & e^{\hat{\xi}\theta} \end{array}\right] \tag{30}$$

を用いると，(29) 式は

$$V' = \mathrm{Ad}_{(g)} V^b \tag{31}$$

で表される．(30) 式において，$p = 0$ の場合は $\mathrm{Ad}_{(e^{\hat{\xi}\theta})}$ と表記し，$e^{\hat{\xi}\theta} = I$ の場合は $\mathrm{Ad}_{(p)}$ と表記する．この随伴写像 $\mathrm{Ad}_{(g)}$ を用いることで，それぞれの速度表現を関係づけることが可能となる．